

Engineering Mathematics

2'nd stage

-Computer Technology Engineering Department

Ass.Teacher

HAIDER RASHEED

الفصل الأول: مقدمة في الأحصاء

علم الإحصاء: هو ذلك العلم الذي يعمل على أستخدام الأسلوب العلمي في طرق جمع البيانات وتبويبها وعرضها وتحليلها بهدف الحصول منها على استنتاجات وقرارات مناسبة.

بعض مفاهيم الإحصاء

I. **البيانات (Data):** هي سلسلة غير مترابطة من الحقائق الموضوعية، التي يمكن الحصول عليها عن طريق الملاحظة، أو عن طريق البحث والتسجيل.

تقسم البيانات الى قسمين:-

a) بيانات الغير المبوبة (Ungrouped Data) : هي البيانات الأولية التي جمعت ولم تبوب.

b) بيانات المبوبة (Grouped Data) : هي البيانات التي نظمت في جدول توزيع تكراري.

II. **المتغيرات (Variables):** المتغير في علم الإحصاء هو الخاصية أو السمة التي تأخذ قيما أو مستويات مختلفة من فرد إلى آخر ويرمز للمتغير بالرمز "X".

تقسم المتغيرات الى قسمين: -

a) **المتغيرات الوصفية (Categorical Variables):** وهي المتغيرات التي يمكن قياسها بوسائط قياس مألوفة او هي تلك الظواهر التي لا يمكن قياسها مباشرة بالأرقام العددية مثل الحالة الاجتماعية (غني، فقير).

b) **المتغيرات الكمية (Numerical Variables) :** هي تلك الظواهر او الصفات التي يمكن قياسها مباشرة بالأرقام العددية مثل صفة الطول، الوزن والعمر.

يمكن تصنيف المتغيرات الكمية الى صنفين:

a) **المتغيرات المستمرة (Continuous Variables):** هي المتغيرات التي تأخذ المتغيرات فيها أي قيمة رقمية ضمن مدى معين. لو افترضنا ان اطوال مجموعة من الأشخاص تتراوح بين 130cm و 170cm ، فأننا نستطيع كتابة المتغير بصيغة:

$$130 \leq X \leq 170$$

b) **المتغيرات المتقطعة (المنفصلة)(Discrete Variables):** هي المتغيرات التي تأخذ المفردة فيها قيما متباعدة. لو فرضنا ان عدد افراد الاسرة في أربعة عوائل هي {٢،٣،٤،٥} فأننا نستطيع كتابة المتغير بصيغة:

X = 2, 3 ,4, 5

III. <u>المجتمع (Population):-</u> هو جميع القيم او المفردات التي يمكن ان يأخذها المتغير.

يتكون المجتمع على نوعان:

a) **مجتمع محدد**: هو المجتمع الذي يمكن حصر عدد مفرداته. على سبيل المثال عدد الوحدات المنتجة في مصنع معين.

b) **مجتمع غير محدد:** هو المجتمع الذي لا يمكن حصر عدد مفرداته. على سبيل المثال عدد الطيور المهاجرة.

IV. <u>العينة (Sample)</u>: هي مجموعة من المفردات يتم اختيارها بطريقة معينة من المجتمع.

<u>المجموع (Summation)</u>

اذا كانت { Xn , … ,X1, X2} تمثل مفردات المتغير X فأن مجموع هذه المفردات يعبر عنها بالرمز:

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$$

Example: Let X = 6, 7, 4, 3. Find $\sum X$, $\sum X^2$ and $(\sum X)^2$

<u>Solution</u>:-

$$\sum X = 6 + 7 + 4 + 3 = 20$$

$$\sum X^2 = 36 + 49 + 16 + 9 = 110$$

$$(\sum X)^2 = (20)^2 = 400$$

العرض الجدولي (Tabular Presentation):

جدول التوزيع التكراري (Frequency Distribution)

1. **الجدول البسيط:** هو جدول بسيط يتكون من عمودين في العمود الأول تقسم فيه قيم المتغير الى مجموعات تدعى الفئات (Classes) والعمود الثاني يبين فيه عدد مفردات كل فئة يسمى التكرارات (Frequencies) ولكل فئة حدان هما الحد الأعلى (Maximum Value) و الحد الأدنى(Minimum Value).

مثال: الجدول التالي يمثل توزيع عدد من الطلبة في جامعة ما حسب اوزانهم.

Classes	Frequencies (Fi)
60-62	85
63-65	15
66-68	45
69-71	27
72-74	8
summation	180

2. **الجدول المزدوج: -**

وهو الجدول الذي توزع فيه البيانات حسب صفتين او ظاهرتين او أكثر في نفس الوقت. فمثلا" الجدول المزدوج (لصفتين) يتآلف من الصفوف التي تمثل فئات او مجاميع احدى الصفتين والاعمدة التي تمثل فئات او مجاميع الصفة الأخرى اما المربعات التي تقابل الصفوف والاعمدة تحتوي على عدد المفردات او التكرارات المشتركة في فئات ومجاميع كلا الصفتين.

مثال: الجدول الاتي يمثل توزيع عدد من طلبة كلية ما حسب صفتي الطول والوزن.

Length \ weight	51-60	61-70	71-80	Summation
121-140	20	6	4	30
141-160	2	40	10	52
161-180	2	6	10	18
Summation	24	52	24	100

طول الفئة (Class Length) :هو مقدار المدى بين حدي الفئة. وهي عبارة عن الفرق بين الحدين الأعلى (او الحدين الأدنى) للفئتين المتتاليتين.

Class Length = Maximum value– Minimum value

مركز الفئة (Class Mid - Point): وهو عبارة عن منتصف المدى بين حدي الفئة.

Class -Mid-point = (Maximum value + Minimum value) / 2

التكرار النسبي (Relative Frequency) : و هي الأهمية النسبة لكل فئة.

$$\textbf{التكرار النسبي لأي فئة} = \frac{\text{تكرار الفئة}}{\text{مجموع التكرارات}}$$

$$\textbf{Relative Frequency} = \frac{\textbf{Fi}}{\sum \textbf{Fi}}$$

ملاحظة: التكرار المئوي = (التكرار النسبي) * 100

Percentage Frequency = Relative Frequency *100

المدرج التكراري (Histogram):

عبارة عن مستطيلات راسية تمتد قواعدها على المحور الافقي لتمثل أطول الفئات بينما ارتفاعاتها تمثل تكرارات الفئات ولرسم مدرج تكراري تتبع الخطوات الاتية: -

a) نرسم المحور الافقي والمحور العمودي

b) نقسم المحور الافقي الى اقسام متساوية بمقياس رسم مناسب بحيث يشمل جميع الحدود الحقيقية للفئات بينما نقسم المحور العمودي الى أقسام متساوية بحيث تشمل أكبر التكرارات.

c) نرسم على كل فئة مستطيل راسي تمثل قاعدته طول تلك الفئة وارتفاعه يمثل تكرار تلك الفئة.

المضلع التكراري (Frequency Polygon)

عبارة عن خطوط مستقيمة متكسرة تصل بين النقاط. كل نقطة واقعة فوق مركز فئة على ارتفاع يمثل تكرار تلك الفئة.

ملاحظة: لرسم المضلع التكراري يجب رسم المدرج التكراري أولا ثم تصنف القواعد العليا للمستطيلات والتي تمثل مراكز الفئات بنقاط ثم نصل هذه النقاط بمستقيمات.

المنحنى التكراري (Frequency Carve):

لا تختلف فكرة رسم المنحني التكراري (Frequency Carve) عن المضلع التكراري (Frequency Polygon) من حيث الأسلوب لكن الفرق الوحيد ما بينهما هو انه بدلا من توصيل النقاط (مركز الفئة، التكرار) بمستقيمات فانه يتم تمرير منحني بين النقاط.

التمثيل البياني لجدول التوزيع التكراري التجميعي:

وهو عبارة عن خطوط مستقيمة متكسرة تصل بين نقاط واقعة فوق الحدود الحقيقية للفئات واعلى ارتفاع يمثل التكرار التجميعي وهنالك نوعان من المضلع التكراري التجميعي:

1- المضلع التكراري التجميعي التصاعدي:

لرسم المضلع التكراري التجميعي التصاعدي نتبع الخطوات الاتية:

a) نرسم المحور الافقي والمحور العمودي

b) نقسم المحور الافقي الى اقسام متساوية بمقياس رسم مناسب بحيث يشمل جميع الحدود الحقيقية للفئات بينما نقسم المحور العمودي الى أقسام متساوية بحيث تشمل أكبر التكرارات التجمعية التصاعدية.

c) نحدد ثم نصل النقاط (مركز الفئة، التكرار التجميعي التصاعدي) بخطوط مستقيمة.

2- المضلع التكراري التجميعي التنازلي:

ويرسم المضلع التكراري التجميعي التنازلي بنفس الطريقة السابقة غير ان هذا المضلع يبدأ من اعلى قيمة (مجموع التكرارات) وينتهي بأقل قيمة.

Example: The following table represents the number of 100 students at the Mathematics department with their weight:

Classes	Frequencies
60-62	5
63-65	18
66-68	42
69-71	27
72-74	8
المجموع	100

Find:

1. Class length
2. Class Mid-point.
3. Class boundary.
4. Draw the Histogram and Frequencies Polygon.
5. Draw the increasing cumulative Frequencies Polygon.
6. Draw the decreasing cumulative Frequencies Polygon.

Solution:

Classes	Frequencies	Relative Frequencies	Percentage Frequencies	Increasing cumulative Frequencies	Decreasing cumulative Frequencies
60-62	5	0.05	5	5	100
63-65	18	0.18	18	23	95
66-68	42	0.42	42	65	77
69-71	27	0.27	27	92	35
72-74	8	0.08	8	100	8
المجموع					

Problem Set (1):

Q1) In the following table, the classes represent the grads and the frequencies represent the number of students in statistics class.

Classes	1-20	21-40	41-60	61-80	81-100
Frequencies	3	8	15	9	2

Find:

1. Class length
2. Class Mid-point.
3. Class boundary.
4. Draw the Histogram and Frequencies Polygon.
5. Draw the increasing cumulative Frequencies Polygon.
6. Draw the decreasing cumulative Frequencies Polygon.

Q2) Choose five students from your classmates to create a data set that has three numerical variables (2 continuous variables and 1 discrete variable), and two categorical variables.

Q3) The following table represents the number of people who died in the last 10 years in a small city.

Classes: Ages	30-40	41-50	51-60	61-70	71-80	81-90
Frequencies	4	8	13	20	39	32

Find:

1. Draw the Histogram and Frequencies Polygon.
2. Draw the increasing cumulative Frequencies Polygon.
3. Draw the decreasing cumulative Frequencies Polygon.

الفصل الثاني: ملخص البيانات

مقاييس النزعة المركزية:

1) **الوسط الحسابي (Mean)**: وهي القيمة الناتجة من قسمة مجموع القيم على عددها.

أ) **البيانات الغير المبوبة**: اذا كان لدينا n من القيم (X1, X2, … , Xn) فأن الوسط الحسابي لها هو:

$$\mathbf{Mean} = \overline{\mathbf{X}} = \frac{\sum \mathbf{X_i}}{\mathbf{n}}$$

ب) **البيانات المبوبة**: اذا كان لدينا n من القيم (X1, X2, … , Xn) التي تمثل مراكز الفئات في جدول التوزيع التكراري مع تكراراتها (F1, F2, … , Fn) على التوالي فأن الوسط الحسابي لها هو:

$$\mathbf{Mean} = \overline{\mathbf{X}} = \frac{\sum \mathbf{F_i X_i}}{\sum \mathbf{F_i}}$$

Example: Find the mean for the following data?

Classes	Fi	Xi	Fi*Xi
31 - 40	**1**	**35.5**	35.5
41 - 50	**2**	**45.5**	91.0
51 - 60	**5**	**55.5**	277.5
61 - 70	**15**	**65.5**	982.5
71 - 80	**25**	**75.5**	1887.5
81 - 90	**20**	**85.5**	1710.5
91 - 100	**12**	**95.5**	1146.5

Solution: -

$$\text{Mean} = \overline{\text{X}} = \frac{\sum \text{F}_\text{i}\text{X}_\text{i}}{\sum \text{F}_\text{i}} = \frac{6130}{80} = 76.62$$

2) **الوسيط (Median):** في البيانات الغير المبوبة اذا كان لدينا n من القيم (X1, X2,…, Xn) ، نرتب القيم ترتيبا" تصاعديا" او تنازليا"

i. إذا كان n عددا" فرديا" فان الوسيط هو القيمة التي موقعها هو $\frac{(n+1)}{2}$.

ii. اذا كان n عددا" زوجيا" فان الوسيط هو متوسط القيمتان التي موقعهما هو $\frac{n}{2}$ و $1+\frac{n}{2}$.

Example1 : Find the median for the following data points?

80, 82,76,87,84

Solution: -

نرتب القيم ترتيبا" تصاعديا:

76, 80, **82**,84,87

عددا" فريديا" n=5 , فأن الوسيط هو القيمة التي موقعها

$$\frac{(n+1)}{2} = \frac{(5+1)}{2} = 3$$

$$So, \quad Median = 82$$

Example 2 : Find the median for the following data points?

5, 4, 8, 7, 3, 12, 9, 2

Solution: -

نرتب القيم ترتيبا" تصاعديا:

2, 3, 4, **5, 7**, 8, 9, 12

n = 8 وهو عددا" زوجيا"، فان الوسيط هو متوسط القيمتان التي موقعهما هو $\frac{n}{2}$ و $1+\frac{n}{2}$

$1+\frac{n}{2} = 1+\frac{8}{2} = 5$, $\frac{n}{2} = \frac{8}{2} = 4$

$$So, \quad Median = \frac{5+7}{2} = 6$$

3) **المنوال (Mode) :**

في البيانات الغير المبوبة اذا كان لدينا n من القيم (X1,X2,…,Xn)، فأن المنوال هي القيمة الأكثر تكرارا".

Example: Find the mode for the following data points?

5, 4, 8, 7, 3, 12, 9, 3, 4, 3

Solution: - Mode = 3

مقاييس التشتت او الاختلاف:

ونقصد به التباعد او التقارب الموجود بين قيم المشاهدات لمتغير ما، وأيضا هي مقياس مدى تشتت قيم المشاهدات عن وسطها فكلما كان التشتت كبير دل ذلك على عدم التجانس بين القيم والعكس صحيح.

i. **المدى(Range) :** في البيانات الغير مبوبة المدى لمجموعة من الأرقام هو الفرق بين اعلى قيمة واقل قيمة من تلك المجموعة.

Example: Find the Range for the following data points?

9, 4, 7, 8, 16, 10, 20, 2

Solution: - Range = 20 – 2 = 18

---

ii. **الانحراف المعياري(Standard Deviation) :** في البيانات الغير مبوبة يمكن ايجاد الانحراف المعياري باستخدام القانون التالي:

$$\textbf{Standard Deviation} = \textbf{s. d.} = \frac{\sum|\textbf{Xi} - \bar{\textbf{X}}|}{\textbf{n}}$$

---

iii. **التباين(Variance) :** هو مقياس للتشتيت الاحصائي للقيم الممكنة حول القيم المتوقعة، وهو مساوي لتربيع الانحراف المعياري.

$$\textbf{Variance} = (\textbf{Standard Deviation})^{\,\textbf{2}}$$

Example: Find the standard deviation and the variance for the following data points?

9, 8, 6, 5, 7

Solution: - First we find the Mean

$$Mean = \bar{X} = \frac{\sum X_i}{n} = \frac{9 + 8 + 6 + 5 + 7}{5} = 7$$

Then,

$$\text{Standard Deviation} = \text{s. d.} = \frac{\sum|Xi - \bar{X}|}{n}$$

Xi	Xi - $\bar{X}$	|Xi - $\bar{X}$|
9	2	2
8	1	1
6	-1	1
5	-2	2
7	0	0

Hence, Standard Deviation = s. d. $= \frac{\sum|Xi-\bar{X}|}{n} = \frac{2+1+1+2+0}{5} = \frac{6}{5}$

$$\text{Variance} = \text{Var} = (\frac{6}{5})^2 = \frac{36}{25}$$

معامل الاختلاف (Coefficient of Variation):

هو مقياس لتشتت أو تبعثر توزيع الاحتمال او التوزيع التكراري، ويعرف معامل الاختلاف باستخدام القانون التالي:

$$Coefficient\ of\ Variation = C.V. = \frac{s.d.}{\bar{X}} * 100$$

Example: In Math and Stat final exams, we found that for Math exam ($\bar{X} = 78\ and\ s.d. = 8$), and for Stat exam ($\bar{X} = 73\ and\ s.d. = 7.6$), in which subject the variation (C.V.) is greater?

Solution: -

For Math exam: $C.V. = \frac{s.d.}{\bar{X}} * 100 = \frac{8}{78} * 100 = 10.25\%$

For Stat exam: $C.V. = \frac{s.d.}{\bar{X}} * 100 = \frac{7.6}{73} * 100 = 10.41\%$

From above, we can see that the variation for Stat exam is greater.

الدرجة القياسية (Z-Score):

في الكثير من الأحيان نحتاج الى المقارنة بين مفردتين من مجموعتين مختلفتين وفي هذه الحالة يجب تحويل وحدات كل مفردة الى وحدات قياسية حتى تكون المقارنة ذات معنى، ويكون هذا باستخدام الوسط الحسابي والانحراف المعياري لكل مجموعة وتسمى هذه القيمة بدرجة القياس ويرمز لها بالرمز (Zi) حيث ان:

$$\mathbf{Zi} = \frac{\mathbf{Xi} - \bar{\mathbf{X}}}{\mathbf{s.d.}}$$

Example: In a classroom, a student got 84 in Mathematic exam where the mean for all students was 76 with s.d. = 10, and the same student got 90 in Biology exam where the mean for all the students was 82 with s.d. = 16. In which subject , did the student perform better?

Solution: -

For Math exam:

$$Zi = \frac{Xi - \bar{X}}{s.d.} = \frac{84 - 76}{10} = 0.8$$

For Bio exam:

$$Zi = \frac{Xi - \bar{X}}{s.d.} = \frac{90 - 82}{16} = 0.5$$

The student performs better in Math exam (because Z-score is higher) even though his grade in Bio exam is greater.

Definition: The range of a data set is the difference between the maximum value and the minimum value of the data set.

Definitions: **Q1** is the first quartile of the data, **Q2 (Median)** is the second quartile of the data, **Q3** is the third quartile of the data.

Definition: Inter Quartile Range (**IQR**) represents the middle 50% of the data.

(i.e., IQR = Q3 – Q1)

Five-Number Summary:

The Five-Number summary for any data set are:

Minimum value, Q1, Q2 (Median), Q3, Maximum value.

Example: Find the five-Number summary for the following data set then compute the IQR?

11, 74, 52, 99, 21, 38, 14, 26, 35, 56, 83, 91

Solution: - First we arrange the data points in increasing order

11, 14, 21, 26, 35, 52, 56, 74, 83, 92, 99

Minimum Value = 11

Q1 = 21

Q2 = 52

Q3 = 83

Maximum Value = 99

The Five-Number summary are: 11, 21, 52, 83, 99

IQR = Q3 – Q1 = 83 -21 = 62

Maximum and Minimum Usual Values:

Minimum Usual Value = Mean - 2 * s.d.

Maximum Usual Value = Mean + 2 * s.d.

Example: Find the Maximum and Minimum usual values for a data set if you know the mean = 16 and the standard deviation = 3 ?

Solution: -

Minimum Usual Value = Mean - 2 * s.d. = 16 – 2*3 = 10

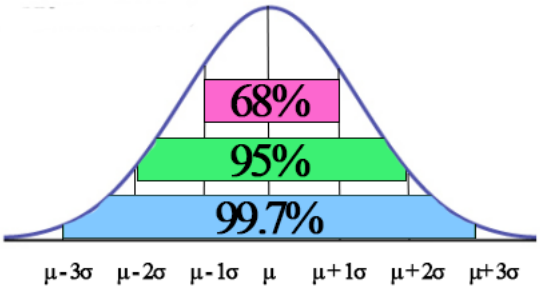
Maximum Usual Value = Mean + 2 * s.d. = 16 + 2*3 = 22

Empirical Rule:

68 % of the data points with 1 s.d.

95 % of the data points with 2 s.d.

99.7 % of the data points with 3 s.d.



Definition: A value that lies between (Mean – 2*s.d.) and (Mean + 2*s.d.) is called a **usual value**, and any value lies outside this range is called **unusual value**.

Example: The mean of H2O bill for a house is $40 with s.d. of $4.34.

a) Find the maximum and minimum usual values?

b) Is an H2O bill of $62 usual?

Solution (a):

Minimum Usual Value = Mean - 2 * s.d. = $40 – 2*4.36 = $48.72

Maximum Usual Value = Mean + 2 * s.d. = $40 + 2*4.36 = $31.28

Solution (b): H2O bill of $62 is Unusual (Not usual) because it lies outside the usual range

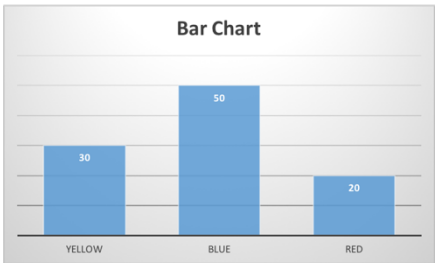
---

Data Visualization:

1. **Bar Chart:** A bar chart is a chart that presents categorical data with rectangular bars with heights proportional to the values that they represent.

Example: In a box, there are 100 balls such that:

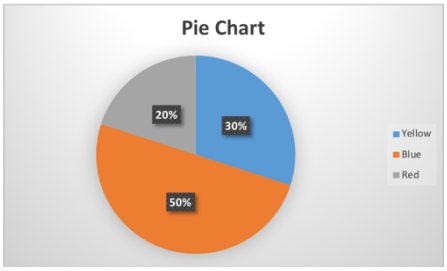
Color	Frequency
Blue	30
Orange	50
Gray	20



2. **Pie Chart:** A pie chart (or a circle chart) is a circular statistical graphic, which is divided into slices to illustrate numerical proportion.

Example: In a box, there are 100 balls such that:

Color	Frequency
Blue	30
Orange	50
Gray	20



3. **Box plot:** In descriptive statistics, a box plot or boxplot is a method for graphically depicting groups of numerical data through their quartiles.

Example: Create a box plot for the following. data points:

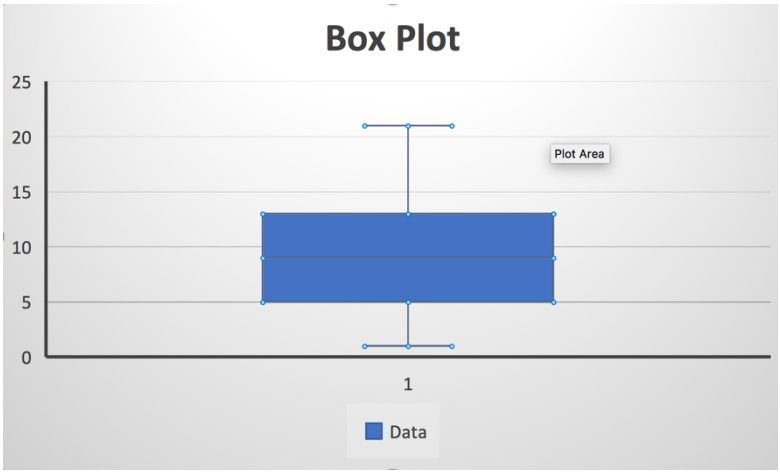
{13,15,1,4,7,5,5,9,13,21,15}

Solution:

First, we arrange the data points in increasing order:

1, 4, 5, 5, 7, 9, 12, 13, 13, 15, 21

Minimum Value = 1
Q1 = 5
Q2 = Median = 9
Q3 = 13
Maximum Value = 21



Problem set (2)

1. Find the mean, median, mode, and midrange for the following data set (student's grads in Statistics class):

   {70, 82, 61, 100, 32, 49, 0, 88, 93, 76}

2. Find the standard deviation and variance for the following data sets:
   a) D1 = {3, 7, 16, 2}
   b) D2 = {77, 83, 91, 75, 85, 69}

3. For the following data set: {5, 2, 3, 7, 10, 5, 3, 8, 15, 12, 12, 8}
   a) Find the five-Number summary then compute the IQR?
   b) Draw a box plot that related to the data points.

4. Find the Maximum and Minimum usual values for a data set:

   {8, 14, 12, 6, 10, 16, 4}

5. The mean of statistics final exam is 70 with standard deviation of 6.
   a) Find the maximum and minimum usual values?
   b) If three students got (81, 85, 61), are these grades considered to be usual or unusual values?

6. At a University, 100 students have been selected and asked "what is your favorite season?". The data has been summarized in the following table. Create a par chart and pie chart for the data set.

Season	Winter	Spring	Summer	Fall
Number of students	30	40	10	20

الفصل الثالث: مبادى نظرية الاحتمال

مفاهيم اساسية:

التجربة العشوائية (Random Experiment) : وهي التجربة التي لا يمكن معرفة نتائجها نتيجة لخضوعها لقوانين الاحتمال.

مثال: رمي قطعة من النقود، سحب ورقة من ورقة اللعب، اختيار كرة من صندوق يحتوي على مجموعة كرات ذات ألوان مختلفة.

فضاء العينة (Sample Space) : وهي مجموعة كل النتائج الممكنة لتجربة معينة تحدد عن طريق الصدفة ويرمز لها بالرمز {S}.

مثال1 : عند رمي قطعة من النقود مرة واحدة فأن فضاء العينة هو.

S = {H, T}, where H represents the Head and T represents the Tail.

مثال2 : عند رمي قطعتين من النقود مرة واحدة فأن فضاء العينة هو.

S = {HH, HT, TH, TT}

الحادثة (Event) : وهي مجموعة جزئية من فضاء العينة ويرمز لها بالرمز

{A, B, C, E, E1, E2, ...}

مثال: عند رمي قطعة من النقود مرة واحدة فأن فضاء العينة هو: S = {H, T}

E1 = {H}, E2 = {T}, and E3 = {H, T} are events.

يمكن تصنفين الحوادث الى (Joint and Disjoint Events):

1 .**الحوادث المتنافية (Disjoint Events)**: يقال عن الحادثتين E1 وE2 حادثتان متنافيتان إذا استحال حدوثهما معا".

مثال: عند رمي قطعة من النقود مرة واحدة فأنه من المستحيل الحصول على H وT في وقت واحد.

2 .**الحوادث الغير متنافية (Joint Events)**: يقال عن الحادثتين E1 وE2 حادثتان غير متنافيتان إذا أمكن حدوثهما معا".

مثال: اختيار شخص ما فأن الحادثتان ان يكون طالب جامعي وموظف هما حادثتان غير متنافيتان.

يمكن تصنفين الحوادث الى (Dependent and Independent Events):

1 . **الحوادث المستقلة (Independent Events):** هي الحوادث التي وقع أحدهما لا يؤثر في وقوع الاخر.

مثال: عند رمي قطعتين من النقود مرة واحدة فأن نتيجة القطعة الأولى لا تؤثر على نتيجة القطعة الثانية.

2 . **الحوادث الغير مستقلة (Dependent Events):** هي الحوادث التي وقوع أحدهما يؤثر على وقوع الحوادث الأخرى.

مثال: صندوق يحتوي على كرات بيضاء وسوداء، فعند سحب كرتان على التوالي بدون ارجاع، فأن سحب الكرة الثانية تتأثر بنتيجة السحبة الأولى. بعبارة أخرى نقول ان السحبتان (الحادثتان) غير مستقلة او معتمدة.

بعض العمليات الحسابية:

المضروب (Factorial) : مضروب n ويرمز له بالرمز (**n!**) ويعرف كما يلي:

$$n! = n*(n-1)*(n-2)*\ldots*2*1$$

ملاحظة: $0! = 1$ and $n! = n(n-1)!$

مثال: جد قيمة 3!, 5!, 7! :

$3! = 3*2*1 = 6$
$5! = 5*4*3*2*1 = 120$
$7! = 7*6*5*4*3*2*1 = 5040$

التباديل (Permutation): يرمز للتباديل بالرمز (P_r^n) ويعرف كالاتي:

$$P_r^n = \frac{n!}{(n-r)!}$$

مثال: جد قيمة P_6^7 ، P_1^5 ، P_2^3 :

$$P_2^3 = \frac{3!}{(3-2)!} = \frac{6}{1} = 6$$

$$P_1^5 = \frac{5!}{(5-1)!} = \frac{5.4!}{4!} = 5$$

$$P_6^7 = \frac{7!}{(7-6)!} = \frac{7!}{1!} = 7!$$

التوافيق (Combination): يرمز للتوافيق بالرمز ($\mathbf{C_r^n}$) ويعرف كالاتي:

$$\mathbf{C_r^n} = \frac{\mathbf{n!}}{\boldsymbol{r}!\,(\mathbf{n}-\mathbf{r})!}$$

مثال: جد قيمة $\mathbf{C_2^4}$ ، $\mathbf{C_3^6}$ ، $\mathbf{C_{99}^{100}}$:

$$C_2^4 = \frac{4!}{2!\,(4-2)!} = \frac{4.3.2!}{2!\,2!} = 6$$

$$C_3^6 = \frac{6!}{3!\,(6-3)!} = \frac{6!}{3!\,3!} = \frac{6.5.4.3!}{3!\,3!} = 20$$

$$C_{99}^{100} = \frac{100!}{99!\,(100-99)!} = \frac{100.99!}{99!\,.1!} = 100$$

قوانين العد (Counting Rules):

1. **الطرق الأساسية:** اذا كان عدد الطرق الممكنة لوقوع الحادثة E1 هو(n) و عدد الطرق الممكنة لوقوع الحادثة E2 هو (m) وكانت E1 و E2 حادثتان مستقلتان فأن عدد الطرق الممكنة لوقوع E1 او E1 هو (n*m) من المرات.

مثال: إذا كان لشخص أربعة قمصان وستة بنطلون، فكم طريقة يمكن للشخص اختيار زي مختلف؟

الحل: n = 6, m= 4
عدد الطرق = m*n= 4*6=24

---

2. **طريقة التباديل (Permutation Rule):** هو ترتيب r من العناصر مأخوذة من n من العناصر في شكل معين (الترتيب مهم) ويرمز له ب الرمز ($\mathbf{P_r^n}$) ويعرف كالاتي:

$$\mathbf{P_r^n} = \frac{\mathbf{n!}}{(\mathbf{n}-\mathbf{r})!}$$

where **n** is the total number and **r** is the number that we want to select

مثال 1 : إذا كان لدينا مجموعة متكونة من ستة ارقام {1,2,3,4,5,6} فبكم طريقة يمكن تكوين رقم يتكون من ثلاث مراتب؟

الحل: n = 6, r= 3، الترتيب مهم

$$P_r^n = P_3^6 = \frac{6!}{(6-3)!} = \frac{6!}{3!} = \frac{6.5.4.3!}{3!} = 120$$

مثال 2 : بكم طريقة يمكن تكوين لجنة تتكون من ثلاث مناصب (الرئيس، النائب وامين السر) اذا علم ان عدد المشاركين بالانتخابات هم عشرة اشخاص؟

الحل: n = 10, r= 3، الترتيب مهم

$$P_r^n = P_3^{10} = \frac{10!}{(10-3)!} = \frac{10!}{7!} = \frac{10.9.8.7!}{7!} = 720$$

---

3. **<u>طريقة التوافيق (Combination Rule):</u>** هو عدد طرق اختيار r من العناصر من n من العناصر بدون ترتيب (الترتيب غير مهم)، ويرمز لها بالرمز ($\mathbf{C_r^n}$) ويعرف كالاتي:

$$\mathbf{C_r^n} = \frac{\mathbf{n!}}{\mathbf{r!\,(n-r)!}}$$

where **n** is the total number and **r** is the number that we want to select

مثال 1: بكم طريق يمكن تكوين لجنة من أربعة طلاب في صف يحتوي على عشرون طالب؟

الحل: n = 20, r= 4 ، الترتيب غير مهم

$$C_r^n = C_4^{20} = \frac{20!}{4!\,(20-4)!} = \frac{20!}{4!\,16!} = \frac{20.19.18.17.16!}{4.3.2.1 * 16!} =$$

مثال2: بكم طريقة يمكن تكوين كلمة تتكون من ثلاثة حروف من بين حروف كلمة ذي قار؟

الحل: n = 5, r= 3 ، الترتيب مهم

$$C_r^n = C_3^5 = \frac{5!}{3!\,(5-3)!} = \frac{5!}{3!\,2!} = \frac{5.4.3.2.1}{3.2.1 * 2.1} = 10$$

الاحتمالية (**Probability**): هي دالة منطقها مجموعة جزئية من فضاء العينة (الحوادث) ومستقرها مجموعة جزئية من الاعداد الحقيقية.

$$\mathbf{P(E)} = \frac{\textbf{Number of ways A can occure}}{\textbf{Number of different simple events}}$$

$$\textbf{i.e.,} \qquad \mathbf{P(E)} = \frac{\textbf{Part}}{\textbf{Total number}}$$

Remarks:

1. $0 \leq P(E) \leq 1$
2. If P(E) = 1, then E is a certain event.
3. If P(E) = 0, then E is impossible event.

ملاحظة: يرمز لمكملة (متممة) الحادثة E بالرمز E^c. حيث ان:

$$P(E^c) = 1 - P(E) \Rightarrow P(E^c) + P(E) = 1$$

مثال: تم رمي قطعة نقود ثلاث مرات، جد احتمالية وجود صورتان؟

الحل: فضاء العينة هو:

S = {HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT}

Event = E = {HHT, HTH, THH}

$$P(E) = \frac{\text{Part}}{\text{Total}} = \frac{3}{8}$$

Example: A box has 3 white balls, 5 black balls, and 2 red balls. If someone select a ball randomly, what is the probability that the ball is (red, not black, not red).

Solution:

Total number = 3 + 5+ 2 = 10 balls

E1 = black ball → P(E1) = P(black) =$\frac{5}{10} = \frac{1}{2}$

E2 = red ball → P(E2) = P(red) = $\frac{2}{10} = \frac{1}{5}$

E3 = white ball → P(E3) = P(white) =$\frac{3}{10}$

Hence,

P(black) =$\frac{5}{10} = \frac{1}{2}$

P(not black) =1- P(black) $= 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

P(not white) =1- P(white) $= 1 - \frac{3}{10} = \frac{7}{10}$

Note: P(black) + P(red) + P(white) =$\mathbf{\frac{5}{10} + \frac{2}{10} + \frac{3}{10} = 1}$

Example: A box has 6 white balls, 4 black balls, and 5 red balls. If someone randomly select a ball, what is the probability that the ball is (white, not white).

Solution:

Total number = 6 + 4 + 5 = 15 balls

P(white) $= \frac{9}{15}$

P(not white) =1- P(white) $= 1 - \frac{6}{15} = \frac{9}{15}$

Note: P(white) + P(not white) $= 1$

قوانين الاحتمالية (Law of Probability):

1 .قانون الجمع (Adding Rule):

i. اذا كانت الحوادث متنافية، أي أذا كانت E1 و E2 حادثتان متنافيتان فان احتمال حدوث أي منهما (E1 او E2) هو حاصل جمع احتمال كل منهما أي:

$$P(E1 \text{ OR } E2) = P(E1 \cup E2) = P(E1) + P(E2)$$

Example: A box has 6 white balls, 3 black balls, and 5 blue balls. If someone select a ball randomly, what is the probability that the ball is white or black?

Solution:

Total number = 6 + 3 + 5 = 14 balls

P(white or black) = P(white) + P(black) = 6/14 +3/14 = 9/14

---

ii. اذا كانت الحوادث غير متنافية، اي اذا كانت E1 و E2 حادثتان غير متنافيتان فان احتمال حدوث أي منهما (E1 او E2) هو حاصل جمع احتمال كل منهما مطروحا" منه احتمال حدوثهما معا" أي:

$$P(E1 \text{ OR } E2) = P(E1 \cup E2) = P(E1) + P(E2) - P(E1 \cap E2)$$

Example: In a class, 25% of the students pass exam1,15% of the students pass exam2, and 10% of the students pass both exam1 and exam2. If someone randomly select a student, what is the probability that the student pass exam1 or exam2?

Solution:

P(student pass exam1 or exam2) = P(student pass exam1) + P(student pass exam2) – p(student pass exam both exam1 and exam2)

→P(student pass exam1 and exam2) = 0.25 + 0.15 - 0.10 = 0.30

---

2. قانون الضرب (Multiplication Rule)

a) اذا كانت الحوادث مستقلة، اي اذا كانت E1 و E2 حادثتان مستقلتان فان احتمال حدوثهما معا" هو حاصل ضرب كل منهما اي:

$$P(E1 \cap E2) = P(E1) * P(E2)$$

Example: A box has 6 white balls, 3 black balls, and 5 blue balls. If someone select a ball randomly, what is the probability that the ball is white and black?

Solution:

Total number = 6 + 3 + 5 = 14 balls

P(white and black) = P(white) * P(black) = 6/14 *3/14 = 18/196

---

b) اذا كانت الحوادث غير مستقلة، اي اذا كانت E1 و E2 حادثتان غير مستقلتان فان احتمال حدوثهما معا" هو:

$$P(E1 \cap E2) = P(E1) * P(E/E1)$$

الاحتمال الشرطي (Conditional Probability)

اذا كان الحادثة E1 قد وقعت فعلا" والمطلوب إيجاد احتمال وقوع الحادثة E2 بحيث ان E2 يعتمد على E1 فأن الاحتمال الشرطي هو:

$$P(E2/E1) = \frac{P(E1 \cap E2)}{P(E1)}, \text{ where } P(E1) > 0$$

Example: In a small city, someone wants to select a person from 900 people where these people (Boy & Girl) and (Job & No job). Find the probability for the following:

1. P(E)
2. P(B)
3. P(G and V)
4. P(B or E)
5. P(B/V)
6. P(G/E)
7. P(E/G)
8. P(V/B)

	Job or No job	
Gender	**Job: E**	**No job: V**
Boy : B	460	40
Girl : G	140	260

Solution: _

Gender	**Job: E**	**No job: V**	**summation**
Boy : B	460	40	500
Girl : G	140	260	400
Summation	600	300	**900**

1. P(E) =

2. P(B) =

3. P(V) =

4. P(E) =

5. P(G and V) =

6. P(B or E) =

7. P(B/V) =

8. P(G/E) =

9. P(E/G) =

10.P(V/B) =

Problem set (3)

1. Give an example for:
   a. Joint and disjoint events.
   b. Dependent and independent events.

2. In how many ways someone can answer five questions from eight questions?

3. Let S = {1,2,3,4,5} be a set of five numbers. In how many ways someone can create a number that consist from three digits such that:
   a. The number is even.
   b. The number is odd.

4. In a classroom, someone wants to select a student from 100 students as described in the following table. Find the following:

	Use a drag	**Does not use a drag**
Sick	20	15
Non-Sick	25	40

a) P(sick)

b) P(Does not use a drag)

c) P(Non-sick **AND** use a drag)

d) P(Sick **OR** Use a drag)

e) P(sick **AND** does not use a drag)

f) P(Non-sick **/** Use a drag)

g) P(Does not use a drag **/**Sick)

h) P(sick **/** Use a drag)

i) P(Non-sick **OR** Does not use a drag)

- **الحدث** Event

هو فئة جزئية من النتائج المكونة لفراغ العينة، ويرمز للحادث بحرف من الحروف الهجائية [A, B, C,...] ، وينقسم الحادث إلي نوعين هما:

1- **حادث بسيط** Simple Event: **وهو الذي يحتوي على نتيجة واحدة من النتائج المكونة لفراغ العينة.**

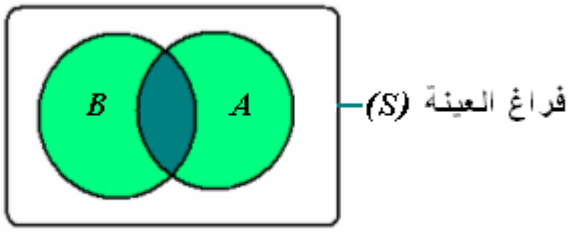
2- **حادث مركب** Component Event: **ويشمل نتيجتين أو أكثر من النتائج المكونة لفراغ العينة، أي أن الحادث المركب يمكن تقسيمه إلى حوادث بسيطة.**

ويرمز لعدد النتائج المكونة للحادث بالرمز $n(A)$, $n(B)$,... **وهكذا.**

فعند إلقاء قطعة عملة غير متحيزة مرتين ، وعرف الحادث A بأنه ظهور الصورة مرتين ، والحادث B ظهور الصورة مرة واحدة على الأقل ، نجد أن فراغ العينة في هذه الحالة هي S:{HH, HT, TH, TT} **، وبالنسبة للحادث A فهو حادث بسيط ، يشمل نتيجة واحدة هي** A:{HH} **، أي أن** n(A)=1 **، أما الحادث B فهو حادث مركب يشمل ثلاث نتائج هي** B:{HT, TH, HH} **، أي أن** n(B)=3 **، وهذا الحادث يمكن تقسيمه إلى أحداث بسيطة .**

- **الاتحاد** ($\cup$) Union

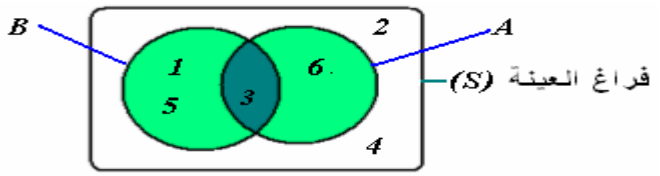
يعبر اتحاد الحادثان A , B عن وقوع أحدها على الأقل، وبمعنى آخر وقوع الأول أو الثاني أو كلاهما، ويعبر عن ذلك رياضيا $(A \cup B)$ **أو** $(A \text{ or } B)$**، ويمكن الاستعانة بشكل "فن"** Ven. Diagram **كما يلي:**



الجزء المظلل يعبر عن الاتحاد $(A \cup B)$

ومثال على ذلك ، عند إلقاء زهرة نرد متزنة مرة واحدة ، وعرف الحادث A بأنه ظهور وجه يقبل القسمة على 3 ، والحادث B بأنه ظهور عدد فردي، يلاحظ أن: S:{1,2,3,4,5,6}, A:{3,6}, B:{1,3,5} **، ويكون اتحاد الحادثان A , B هو:**

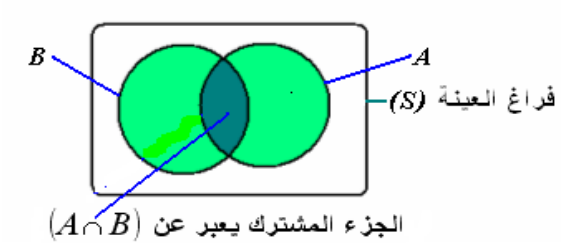
$(A\cup B):\{1,3,5,6\}$ ، ويعبر عن ذلك في شكل Ven كما يلي:



$(A\cup B):\{1,3,5,6\}$

- **التقاطع** $(\cap)$ Intersection

يعبر تقاطع الحادثان A , B عن وقوع الاثنان في آن واحد ، ويشمل كل النتائج المشتركة بين الحادثين، ويعبر عن ذلك رياضيا $(A\cap B)$ **أو** $(A \text{ and } B)$ **، ويظهر ذلك في شكل "فن" كما يلي :**

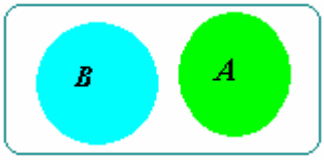


$(A\cap B)$ الجزء المشترك يعبر عن

ففي المثال السابق ، نجد أن $(A\cap B):\{3\}$.

- **الأحداث المتنافية** Mutually Exclusive evens

يقال أن الحادثان A, B متنافيان، إذا كان وقوع أحدها ينفي وقوع الحدث الآخر، بمعنى استحالة وقوعهما في آن واحد، ومن ثم يكون نتيجة تقاطع الحادثان المتنافيان هي الفئة الخالية ويرمز لها بالرمز ϕ **أي أن** $A\cap B=\phi$ **، ويمكن تمثيلها بشكل " فن " كما يلي:**

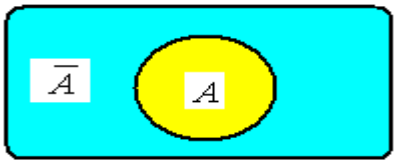


$(A\cap B)=\phi$ **لا توجد نتائج مشتركة**

- **الحادث المكمل** Compliment Event

الحادث المكمل للحادث A هو الذي ينفي وقوعه، بمعنى آخر هو الحادث الذي يشمل كل نتائج التجربة باستثناء النتائج المكونة للحادث A، ويرمز للحادث المكمل بالرمز $\overline{A}$ **، ومن ثم نستنتج أن :** $\left(A\cup\overline{A}\right)=S$, $\left(A\cap\overline{A}\right)=\phi$

كما هو مبين بالشكل التالي:



مثـال 1

ألقيت قطعة عملة غير متحيزة ثلاث مرات، وعرفت الأحداث التالية:

الحادث A ظهور الصورة مرتين.

الحادث B ظهور الصورة مرة واحدة.

الحادث C ظهور الصورة في الرمية الأولى.

والمطلوب:

1-إيجاد الأحداث الخاصة بالاتحاد:

$$A\cup B\ ,\ A\cup C\ ,\ B\cup C\ ,\ A\cup B\cup C$$

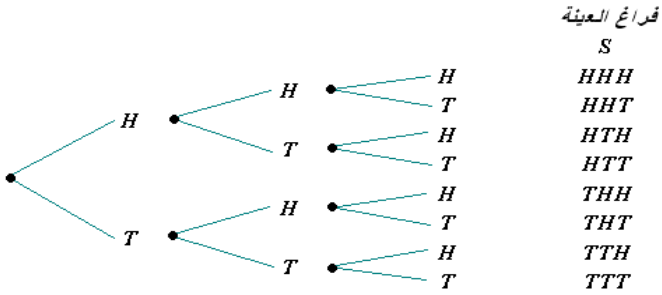
2-إيجاد الأحداث الخاصة بالتقاطعات:

$$A\cap B\ ,\ A\cap C\ ,\ B\cap C\ ,\ A\cap B\cap C$$

3-أوجد الحادث $\overline{B}$

الحـل

- **فراغ العينة لهذه التجربة هو:**



$$n(S)=8$$

- **وأما الأحداث هي:**

$$A:\{HHT,HTH,THH\},\ B:\{HTT,THT,TTH\},\ C:\{HHH,HHT,HTH,HTT\}$$

$$n(B)=3 \qquad n(C)=4$$

$$n(A)=3$$

1- الأحداث الخاصة بالاتحاد:

$(A \cup B): \{HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH\}$, $n_{(A \cup B)} = 6$

$(A \cup C): \{HHT, HTH, THH, HHH, HTT\}$, $n_{(A \cup C)} = 5$

$(B \cup C): \{HHH, HHT, HTH, HTT, THT, TTH\}$, $n_{(B \cup C)} = 6$

$(A \cup B \cup C): \{HHH, HHT, HTH, HTT, THT, TTH, THH\}, n_{(A \cup B \cup C)} = 7$

2- الأحداث الخاصة بالتقاطع:

$(A \cap B): \phi$, $n_{(A \cap B)} = 0$

$(A \cap C): \{HHT, HTH\}$, $n_{(A \cap C)} = 2$

$(B \cap C): \{HTT\}$, $n_{(B \cap C)} = 1$

$(A \cap B \cap C): \phi$, $n_{(A \cap B \cap C)} = 0$

3- إيجاد $\overline{B}$:

$(\overline{B}): \{HHH, HHT, HTH, THH, TTT\}$, $n_{(\overline{B})} = 5$

3- طرق حساب الاحتمالات

يعتمد حساب الاحتمال من الناحية النظرية على أسس وقواعد الرياضيات، ويعتبر هذا النوع من الاحتمال هو العنصر الأساسي في الاستدلال الإحصائي، ولكن في المجال التجريبي تعتمد الاحتمالات على النتائج الفعلية لمشاهدات التجربة، وعلى تكرار الحادث محل الاهتمام، فإذا رمزنا لاحتمال وقوع الحادث A بالرمز $P(A)$، فإن طريقة حساب هذا الاحتمال تتحدد وفقا لنوع الاحتمال، وهما نوعان:

- **الاحتمال التجريبي** Empirical probability **: ويعبر عنه بالتكرار النسبي، ويحسب بتطبيق المعادلة التالية:**

$$P(A) = \frac{f(A)}{n} \qquad (1-7)$$

حيث أن: n هو مجموع التكرارات(العدد الكلي للمشاهدات)، $f(A)$: هو تكرار الحادث A،

فإذا تم إلقاء قطعة عملة غير متحيزة 500 مرة، وتم ملاحظة عدد مرات ظهور كل وجه، ولخصت كالتالي:

الوجه (Face)	H	T	SUM
عدد مرات ظهور الوجه	260	240	500

وإذا كان المطلوب حساب احتمال ظهور الصورة *H*، يمكن تطبيق المعادلة رقم (7-1)، والتي تعتمد على التكرار النسبي، أي أن :

$$P(H)=\frac{f(H)}{n}=\frac{260}{500}=0.52$$

مثـال

عند إلقاء زهرة نرد غير متحيزة مرتين، فأوجد ما يلي:

1- احتمال ظهور وجهين متشابهين.
2- احتمال ظهور وجهين مجموع نقاطهما 10.
3- احتمال ظهور وجهين متشابهين أو مجموع نقاطهما 10.
4- احتمال ظهور وجهين مجموع نقاطهما 7 أو 10.

الحـــل:

نتائج فراغ العينة هي:

S

	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

n(S)=36

1- بفرض أن الحادث A هو حادث ظهور وجهين متشابهين، فإن:

$$A:\{(1,1)\ (2,2)\ (3,3)\ (4,4)\ (5,5)\ (6.6)\},\ n(A)=6$$

ويكون احتمال ظهور وجهين متشابهين هو:

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$$

2- بفرض أن الحادث B هو حادث ظهور وجهين مجموع نقاطهما 10، فإن:

$$B:\{(4,6)\ (5,5)\ (6,4)\},\ n(B)=3$$

ويكون احتمال ظهور وجهين متشابهين هو :

$$P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{3}{36}=\frac{1}{12}$$

3- لحساب احتمال ظهور وجهين متشابهين أو (or) مجموع نقاطهما 10 ، تستخدم المعادلة (7-3)، حيث أن:

$$P(A)=\frac{1}{6}\ ,\ P(B)=\frac{1}{12}$$

وأما التقاطع $(A\cap B)$ فيعبر عن ظهور وجهين متشابهين و مجموعهما 10 يمكن حسابه كما يلي:

$$(A\cap B):\{(5,5)\}\ ,\ n(A\cap B)=1$$

$$P(A\cap B)=\frac{n(A\cap B)}{n(S)}=\frac{1}{36}$$

ومن ثم:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

$$=\frac{1}{6}+\frac{1}{12}-\frac{1}{36}=\frac{8}{36}=\frac{2}{9}$$

4- بفرض أن الحادث C هو حادث ظهور وجهين مجموع نقاطهما 7،

والحادث B هو حادث ظهور وجهين مجموع نقاطهما 10 ، نجد أن:

$B:\{(4,6)\ (5,5)\ (6,4)\}$, $C:\{(1,6)\ (2,5)\ (3,4)\ (4,3)\ (5,2)\ (6,1)\}$

$n(C)=6$

$n(B)=3$

$P(B) = 3/36$ ، $P(C) = 6/36$

يلاحظ أن الحادثين C, B حادثين متنافيين، لذا تستخدم المعادلة (7-5) في حساب الاحتمال المطلوب كما يلي:

$$P(B \cup C) = P(B) + P(C) = \frac{3}{36} + \frac{6}{36}$$
$$= \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$

- قانون الاحتمال الشرطي Conditional probability

يستند هذا الاحتمال على فرصة وقوع حادث، إذا توافرت معلومات عن وقوع حادث آخر له علاقة بالحادث الأول، كاحتمال نجاح الطالب في مادة الرياضيات إذا علم أنه من الناجحين في مادة الاتصالات ، وكاحتمال أن الخريج يعمل بالقطاع الخاص، إذا علم أنه ممن تخرجوا من قسم معين

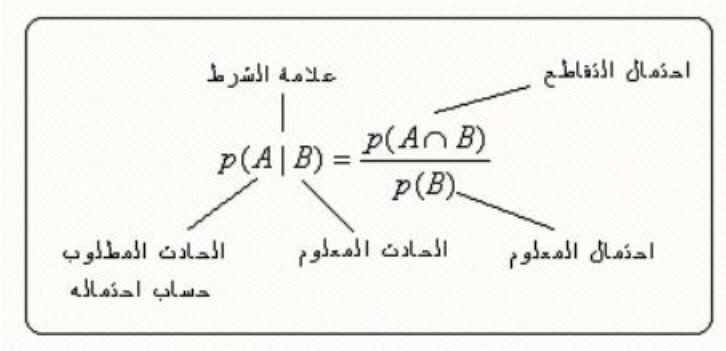
فإذا كان الحادث B حادث معلوم، والحادث A حادث آخر يراد حساب احتمال وقوعه، بمعلومية الحادث B، فإن هذا الاحتمال يحسب بتطبيق المعادلة التالية:

$$p(A \mid B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} \qquad (٦-٧)$$

ويعرف الاحتمال $p(A|B)$ بقانون الاحتمال الشرطي، ويقرأ "احتمال وقوع الحادث A بمعلومية الحادث B"، أو يقرأ "احتمال وقوع الحادث A بشرط وقوع الحادث B"، كما يمكن حساب احتمال وقوع الحادث بمعلومية الحادث ، وذلك بتطبيق المعادلة التالية:

$$p(B \mid A) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)} \qquad (7-7)$$

ومن المعادلة (7-6)، (7-7) يلاحظ أن الاحتمال الشرطي هو نسبة حادث التقاطع بين إلى الحادث المعلوم، حيث أن :



مثال

فيما يلي توزيع تكراري لعينة عشوائية حجمها 100 من خريجي الكلية في العامين الماضيين، حسب التخصص، ونوع المهنة:

المهنة / التخصص	عمل حكومي	قطاع خاص	عمل حر	Sum
حاسبات	15	5	10	30
الامن السيبراني	8	17	10	35
الاتصالات	12	10	13	35
Sum	35	32	33	100

فإذا اختير أحد الخريجين بطريقة عشوائية، احسب الاحتمالات التالية:

1- ما احتمال أن يكون من خريجي قسم الحاسبات و يعمل بالقطاع الخاص.
2- ما احتمال أن يكون ممن يعملون بالحكومة أو من خريجي قسم الامن السيبراني .
3- ما احتمال أن يكون من خريجي قسم الامن السيبراني او من قسم الاتصالات
4- إذا علم أن الفرد من خريجي قسم الاتصالات، ما احتمال أن يكون ممن يعملون عملا حرا.

الحل:

<u>أولا:</u> نرمز لنوع المهنة بالرمز A، ولنوع التخصص بالرمز B ، كما هو مبين بالجدول التالي:

المهنة / التخصص	عمل حكومي A_1	قطاع خاص A_2	عمل حر A_3	Sum
حاسبات	15	5	10	30
B_2 الامن السيبراني	8	17	10	35
B_3 الاتصالات	12	10	13	35
Sum	35	32	33	100

ثانيا: التكرار في كل خلية يعبر عن عدد الخريجين الذين ينتمون لقسم معين و يعملون في مهنة معينة، أي يعبر عن عدد تكرارات حوادث التقاطع الممكنة $A \cap B$.

1- حساب احتمال أن يكون من خريجي الحاسبات و يعمل بالقطاع الخاص.

$$P(B_1 \cap A_2) = \frac{f(B_1 \cap A_2)}{n} = \frac{5}{100} = 0.05$$

2- حساب احتمال أن يكون ممن يعملون بالحكومة أو من خريجي قسم الامن السيبراني

$$P(A_1 \cup B_2) = p(A_1) + P(B_2) - P(A_1 \cap B_2)$$
$$= \frac{35}{100} + \frac{35}{100} - \frac{8}{100} = \frac{62}{100} = 0.62$$

3- حساب احتمال أن يكون من خريجي الامن السيبراني او من قسم الاتصالات

هذان حادثان متنافيان، لأن تخرج الفرد من أحد الأقسام ينفي تخرجه من الأقسام الآخرى، وبمعنى آخر استحالة أن الفرد تخرج من قسمين في آن واحد، لذا يكون احتمال اتحادهما هو:

$$P(B_2 \cup B_3) = p(B_2) + P(B_3)$$
$$= \frac{35}{100} + \frac{35}{100} = \frac{70}{100} = 0.70$$

4- إذا علم أن الفرد من خريجي قسم الامن السيبراني ، ما احتمال أن يكون ممن يعملون عملا حرا، هذا احتمال شرطي، المطلوب هنا " حساب احتمال أن الفرد ممن يعملون عملا حرا A_3 بشرط أنه من خريجي قسم الامن السيبراني B_2، أي أن الاحتمال المطلوب هو:

$$p(A_3 \mid B_2) = \frac{p(A_3 \cap B_2)}{p(B_2)} = \frac{\left(\frac{10}{100}\right)}{\left(\frac{35}{100}\right)} = \frac{10}{35}$$

Home work

الجدول التالي يبين عدد الوحدات السليمة، والتالفة من الخبز العربي بعد ثلاث أيام من تاريخ الإنتاج في أحد مراكز التموين التي تتعامل مع ثلاث مخابز هي : *(C , B , A)* .

	عدد الوحدات السليمة	عدد الوحدات التالفة	الإجمالي
مخبز A	36	24	60
مخبز B	60	63	123
مخبز C	54	33	87
الإجمالي	150	120	270

إذا اختيرت وحدة من الخبز بطريقة عشوائية، فأوجد الآتي:

1- ما احتمال أن تكون من إنتاج المخبز *B* ؟
2- ما احتمال أن تكون تالفة ؟
3- إذا كانت الوحدة سليمة ، ما احتمال أن تكون من إنتاج المخبز *C* ؟
4- ما احتمال أن تكون الوحدة من إنتاج المخبز *A* أو تكون تالفة ؟
5- إذا كانت الوحدة من إنتاج المخبز *A*، ما احتمال أن تكون تالفة ؟

الفصل الرابع : بعض التوزيعات الاحتمالية

المتغير العشوائي يكون على نوعين :

المتغير العشوائي المتقطع **: يقال أن x متغير عشوائي متقطع إذا كان فضاء العينة مجموعة قابلة للعد سواء كانت مجموعة منتهية أو غير منتهية .مثلا : عدد السيارات التي تمر على جسر خلال 5 دقائق**

القيم: 0، 1، 2، 3، ...

المتغير العشوائي المستمر **: يقال أن x متغير عشوائي مستمر إذا كان فضاء العينة مجموعة غير قابلة للعد سواء كانت مجموعة منتهية أو غير** منتهية مثلا: **المسافة التي يقطعها سائق خلال ساعة** يمكن أن تكون أي رقم حقيقي ضمن مدى معين..

بعض التوزيعات النظرية المتقطعة :

توزيع ثنائي الحدين : Binomial distribution

لقد جاءت تسمية ثنائي الحدين بسبب أن هنالك حالتين تدرس في آن واحد مثل جيد أو غير جيد ، مطابق أو غير مطابق ، معيب أو غير معيب .

لنفرض أن هناك تجربة بـ (n) من المحاولات المستقلة ، بحيث أن نتائج كل محاولة تتمثل بإحدى حالتين ممكنتين فقط وهي نجاح المحاولة أو فشل المحاولة ، وإذا فرضنا أن (p) تمثل احتمال نجاح المحاولة ، وأن (q=1-p) تمثل احتمال فشل المحاولة ، عندئذ فأن احتمال الحصول على (x) من المحاولات الناجحة حيث أن $(x \le n)$ هو : $P(x) = C_x^n P^x q^{n-x}$

إذن أصبح لدينا متغير عشوائي من النوع المتقطع هو (x) يمثل عدد مرات نجاح المحاولة وهناك دالة بدلالة هذا المتغير هي p(x) ، إذن يقال أن المتغير العشوائي (x) يتوزع على وفق توزيع ذي الحدين (ثنائي الحدين) إذا كانت دالة الكتلة الاحتمالية له بالشكل التالي :

P(X) = $C_x^n P^x q^{n-x}$ **x=0,1,2,3...**

q=1-p , $0 < p < 1$

Otherwise= 0

.

إن كلاً من n و p تسمى معلمات التوزيع ، ولغرض التمييز يعبر عن التوزيع ثنائي الحدين بالشكل التالي : $x \approx b(n, p)$

فعلى سبيل المثال لو قلنا أن $x \approx b(10,0.6)$ **هذا يعني أن p=0.6 و n=10 وأنه يمكن حساب بعض المقاييس الخاصة بهذا التوزيع وهي :**

(1) الوسط الحسابي لقيم x هو (np)

(2) التباين لقيم هو (npq)

(3) الانحراف المعياري لقيم x هو $\sqrt{npq}$

سؤال 1 : **افرض أن** $x \approx b(10,0.6)$ **جد ما يلي :**

1-دالة الكتلة الاحتمالية لـ (x) 2-احسب الوسط الحسابي والتباين لـ (x)

3- اوجد ناتج كلا مما يأتي : $p(x)=5$ ، $p(x)\le 2$ ، $p(x)>8$ ، $p(x)\ge 8$ ، $p(x)<2$

الحل :

1- بما أن $x \approx b(10,0.6)$ **فأن دالة الكتلة الاحتمالية لـ (x) هي :**

$$p(x)C_x^{10}(0.6)^x(0.4)^{n-x}$$

x=0,1,2,…,10

p=0.6 , q=1-0.6=0.4

2-

$$\mu_x = np = (10)(0.6) = 6$$

$$\sigma_x^2 = npq = (10)(0.6)(0.4) = 2.4$$

3-

$$p(x) = 5 = C_5^{10}(0.6)^5(0.4)^{10-5} = 0.200$$

=(0.01024)(0.07776)

0.2≅ 0.200592= (0.000796)(252) =

$$p(x) \le 2 = p(x=2) + p(x=1) + p(x=0)$$

$$= C_2^{10}(0.6)^2(0.4)^{10-2} + C_1^{10}(0.6)^1(0.4)^{10-1} + C_0^{10}(0.6)^0(0.4)^{10-0}$$

=0.01062+0.00157+0.001048=0.01324

$$p(x>8) = p(x=9) + p(x=10)$$

$$= C_9^{10}(0.6)^9(0.4)^{10-9} + C_{10}^{10}(0.6)^{10}(0.4)^{10-10}$$

=0.04031+0.06046=0.10077

$$p(x \ge 8) = p(x=8) + p(x=9) + p(x=10)$$

$$= C_8^{10}(0.6)^8(0.4)^{10-8} + C_9^{10}(0.6)^9(0.4)^{10-9} + C_{10}^{10}(0.6)^{10}(0.4)^{10-10}$$

=0.12093+0.04031+0.06046=0.2217

$$p(x<2) = p(x \le 1) = p(x=1) + p(x=0)$$

$$= C_1^{10}(0.6)^1(0.4)^{10-1}1 + C_0^{10}(0.6)^0(0.4)^{10-0}$$

=0.00157+0.001048=0.0026

توزيع بويسون : Poisson distribution

يعد توزيع بويسون من التوزيعات المتقطعة المهمة جداً في الكثير من التطبيقات الاحصائية ويطلق عليه في بعض الأحيان توزيع الحوادث النادرة الحصول ، مثال ذلك عدد الوحدات المعيبة في إنتاج كبير لمصنع معين وكذلك عدد النداءات الهاتفية المستلمة من قبل هاتف خلال فترة زمنية محددة .

يقال أن المتغير العشوائي (x) يتوزع على وفق دالة توزيع بويسون إذا كانت دالة الكتلة الاحتمالية لهذا المتغير بالشكل التالي :

$$P(x)=\begin{cases}\dfrac{\lambda^{x}e^{-\lambda}}{x!} & x=0,1,2,.....\\ & \lambda>0\ ,\ e=2.71828\\ \text{Otherwise}=0\end{cases}$$

حيث (λ) Lambda تمثل معلمة التوزيع ، ويمكن التعبير عن هذا التوزيع على شكل رموز كما يلي :

$$x \approx Po(\lambda)$$

ويتم تشخيص التوزيع من خلال تحديد قيمة معلمة التوزيع (λ) ، *ويعد توزيع بواسون حالة خاصة من توزيع ثنائي الحدين عندما يكون احتمال نجاح المحاولة* (p) *صغيراً جداً (أي يقترب من الصفر) ، وأن عدد المحاولات كبيراً جداً (نظرياً) يقترب من ما لانهاية)* ، بحيث أن (np) وتبعاً للشرطين المذكورين تستقر نحو عدد ثابت مثل (λ) معلمة توزيع بويسون .

ويمكن حساب بعض المقاييس الخاصة بهذا التوزيع وهي :

(1) الوسط الحسابي لقيم (x) هو (λ)

(2) التباين لقيم (x) هو (λ)

(3) الانحراف المعياري لقيم (x) هو $\sqrt{\lambda}$

مثال (1) : إذا كان $x \approx Po(5)$ جد :

A-دالة الكتلة الاحتمالية B-الوسط الحسابي وتباين التوزيع C-قيمة p(x=0)

الحل :

$$p(x) = \frac{5^x e^{-5}}{x!}$$ X=0,1,2,..... - A

$$\mu_x = \lambda = 5$$

$$\sigma_x^2 = \lambda = 5$$ - B

$$p(x=0) = \frac{5^0 e^{-5}}{0!} = e^{-5} = 0.00674$$ e_5_146 166 -C

مثال (2) : إذا علمت أن $x \approx Po(4)$ ، احسب الاحتمالات الآتية :

$p(x) \le 2$ ، $p(x > 1)$ ، p(x=3) ، $p(1 \le x \le 3)$

الحل : بما أن λ=4

إذن $p(x) = \frac{4^x e^{-4}}{x!}$ x=0,1,2,.....

$$p(1 \le x \le 3) = p(x=1) + p(x=2) + p(x=3)$$

$$= 4e^{-4} + 8e^{-4} + 10.667e^{-4}$$
$$= 22.667e^{-4} = 0.41515$$

P(x=3)=p(3)=10.667e^{-4}=0.1954

$$p(x > 1) = 1 - p(x \leq 1)$$

=1-{p(0)+p(1)}

=1-[e^{-4}+4e^{-4}]

=1-5e^{-4}=0.9084

$$p(x \leq 2) = p(0) + p(1) + p(2)$$
$$= e^{-4} + 4e^{-4} + 8e^{-4}$$
$$= 13e^{-4} = 0.2381$$

بعض التوزيعات النظرية المستمرة

التوزيع الطبيعي : The Normal Distribution

خواص التوزيع الطبيعي :

1-التوزيع الطبيعي شكله يشبه شكل الجرس ، وعليه فهو متماثل حول العمود المقام على الوسط الحسابي .

2-التوزيع الطبيعي له قمة واحدة وهذا طبعاً يعطينا استنتاج بأن له منوال واحد يساوي μ

3-يتقارب طرفا منحى هذا التوزيع من الصفر عندما $x \to \pm\infty$

4-المساحة تحت منحنى التوزيع الطبيعي تساوي واحد .

التوزيع الطبيعي القياسي :

التوزيع الطبيعي القياسي حالة خاصة من التوزيع الطبيعي ، يكون وسطه الحسابي صفر وتباينه واحد ، يسمى المتغير العشوائي الذي يخضع للتوزيع الطبيعي القياسي بالمتغير Z .

المتغير العشوائي X يتوزع توزيع طبيعي بوسط μ وتباين $\sigma 2$ **فأن توزيع المتغير العشوائي هو التوزيع الطبيعي القياسي بوسط صفر وتباين واحد .**

إن كل قيمة من قيم X يقابلها قيمة من قيم Z ، وتسمى قيم Z القيم المعيارية أو القياسية .

$X \sim N(\mu, \sigma 2)$

مثال (3): **إذا كان X متغير عشوائي (يمثل أوزان الطلبة) له توزيع طبيعي بمعدل μ=62 و** .

$\sigma^2 = 36$

المطلوب :

1-حول المتغير X الى متغير له توزيع طبيعي قياسي

2-أوجد القيمة المعيارية المقابلة لقيمة X=70

الحل :

1- $Z = \frac{x-\mu}{\sigma} = \frac{x-62}{6}$

2- $Z = \frac{x-\mu}{\sigma} = \frac{70-62}{6} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$

توزيع مربع كاي : Chi-Square Distribution

منحنى هذا التوزيع غير متماثل ، بل هو منحنى ملتو التواء موجب نحو جهة اليمين .

خصائص هذا التوزيع :

1-الوسط الحسابي لقيم المتغير العشوائي في هذا التوزيع (n)

2-تباين قيم المتغير العشوائي في هذا التوزيع هو (2n)

3-درجة الحرية هي (n)

Student-t Distribution

يستخدم هذا التوزيع في حالة الاختبارات الخاصة بحجوم العينات الصغيرة . هذا التوزيع مشتق من حاصل قسمة متغيرين مستقلين ، المتغير الأول في البسط هو متغير ذو توزيع طبيعي قياسي ،

والمتغير الثاني في المقام هو الجذر التربيعي الموجب لمتغير ذو توزيع مربع كاي مقسوماً على درجة حريته .

$$t = \frac{Z}{\sqrt{\frac{x^2}{n}}}$$

المتغير العشوائي (t) يعرف بالشكل الآتي :

خصائص هذا التوزيع :

1-الوسط الحسابي لقيم المتغير العشوائي هو نفس الوسط الحسابي للمتغير $Z \approx N(0,1)$

2-درجة الحرية لهذا التوزيع هي (n)

توزيع F : F-Distribution

هذا التوزيع مشتق من توزيعين مستقلين كل منهما يمثل توزيع مربع كاي .

يعبر عن توزيع F بالشكل التالي :

$$F = \frac{x_1^2 / n_1}{x_2^2 / n_2}$$

الفصل الخامس : التوزيع الطبيعي

Now that we have discussed how to use Standardized Normal Distribution Table in relation with the standard normal value formula, we will apply it to different probability problems involving normal distributions.

Here is the formula,

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

Where ***z= z value***

x= the value of any particular observation or measurement

μ ***= population mean***

σ ***= population standard deviation***

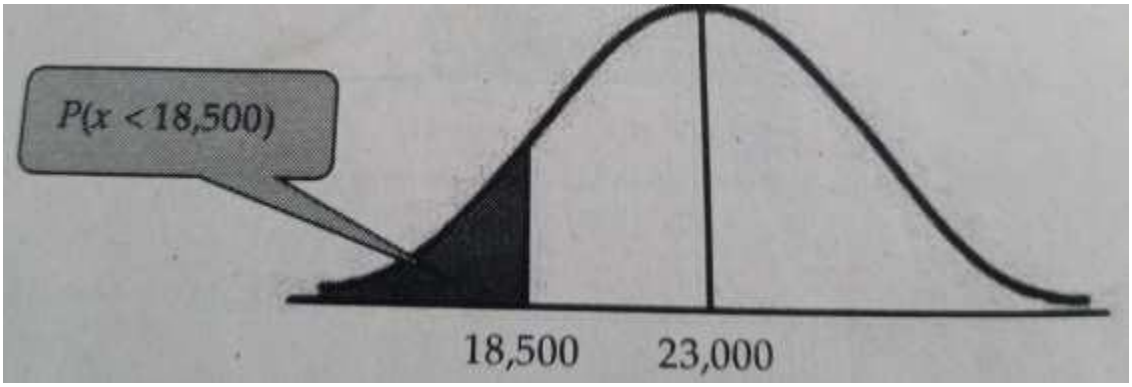
The formula is used to gain information about an individual data values when the variables are normally distributed

A. Computing a Normal Probability to a Standard Normal Probability

Example 1: The average Pag –ibig salary loan for a certain company employees is Php23,000. If the debt is normally distributed with a standard deviation of Php2,500, find the probability that the employee owes less than Php 18,500.

Solution:

Step 1: Draw the figure and represent the area.



Step 2: Find the z value for Php 18,500. Apply the formula above.

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{18{,}500 - 23{,}500}{2{,}500} = \frac{-4{,}500}{2{,}500} = -1.80$$

Step 3: Find the appropriate area. The area obtained is 0.4641 in the z table which corresponds to the area between z = 0 and z= -1.80

Step 4: Subtract 0.4641 from 0.5000

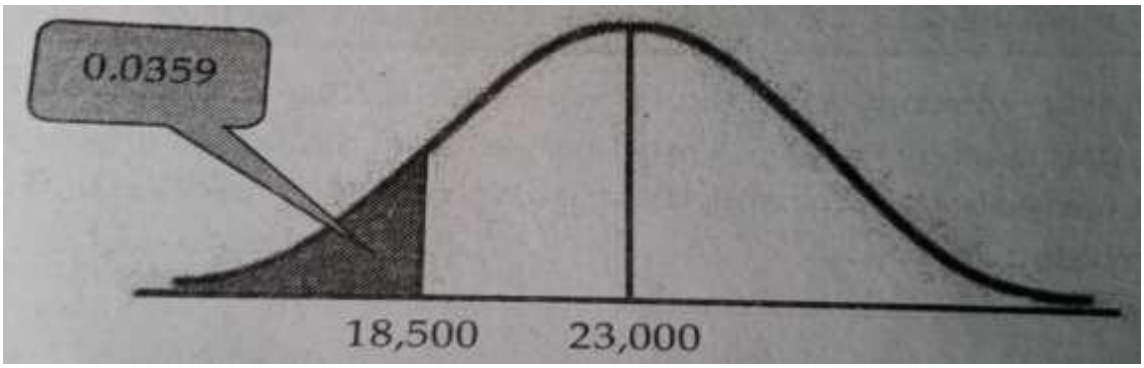
$P(x < 18{,}500) = P(z < -1.80)$

$= 0.5000 - P(-1.80 < z < 0)$

$= 0.5000 - 0.4641$

$= 0.0359$

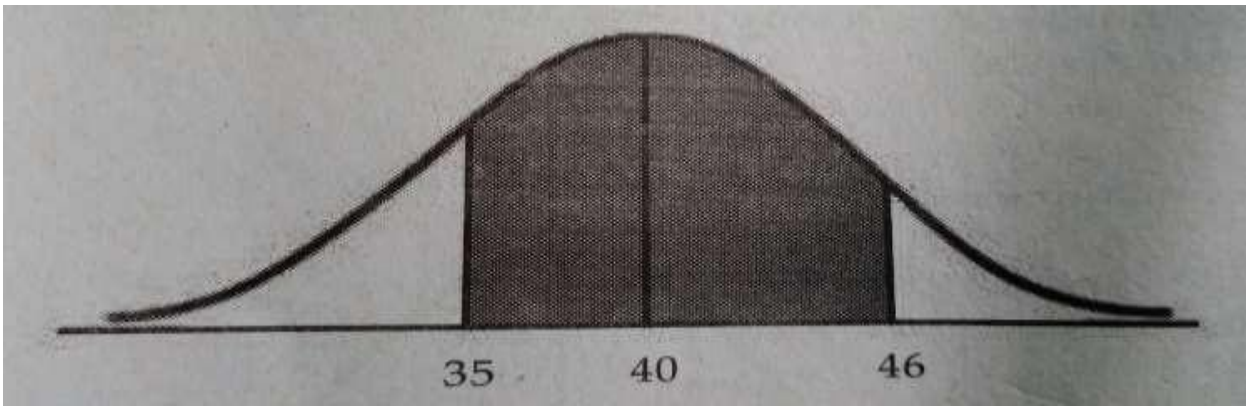
SKETCH:



Example 2: The average age of bank managers is 40 years. Assume the variable is normally distributed. If the standard deviation is 5 years, find the probability that the age of the randomly selected bank manager will be in the range between 35 and 46 years old

Solution:

Step 1: Draw the figure that represent the area.



Step 2: Find the two values using the formula.

$$z = \frac{x-\mu}{\sigma} = \frac{35-40}{5} = \frac{-5}{5} = -1.00$$

$$z = \frac{x-\mu}{\sigma} = \frac{46-40}{5} = \frac{6}{5} = 1.20$$

Step 3: Find the appropriate area for z=-1.00 and z=1.20 in the z table of values.

-1.00 = 0.3413

1.20 = 0.3849

Step 4: Add $P(-1.00 < z < 0) and P(0 < z < 1.20)$

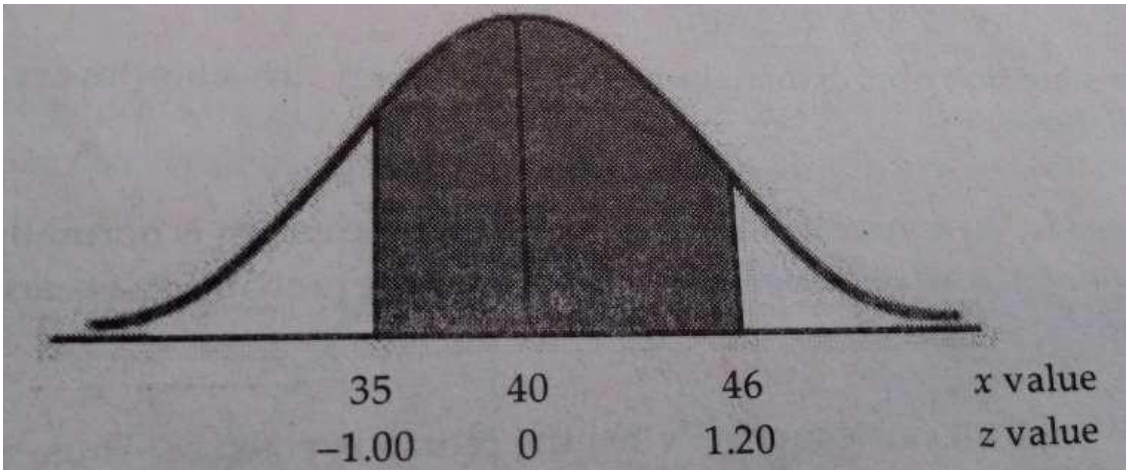
$$P(35 < x < 46) = P(-1.00 < z < 1.20)$$

$$= P(-1.00 < z < 0) + P(0 < z < 1.20)$$

$$= 0.3413 + 3849$$

$$= 0.7262$$

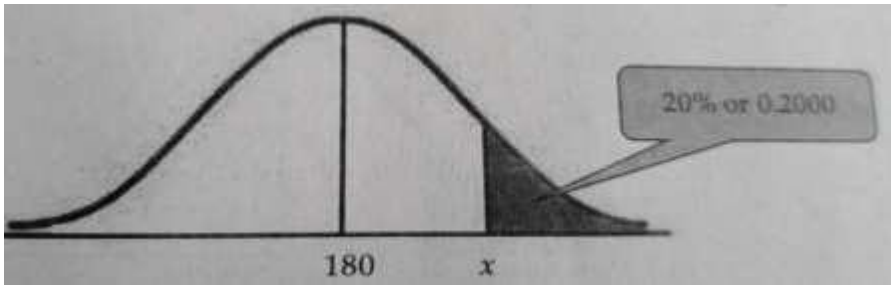
SKETCH:



Other Applications of the Normal Distribution

Example 3:To qualify for a Master's degree program in Business Administration at San Sebastian College, candidates must score in the top 20% on a mental ability test. The test has a mean of 180 and a standard deviation of 25. Find the lowest possible score to qualify. Assume the test scores are normally distributed.

Solution: Take note the scores are normally distributed; the test value x that cut off the upper 20% of the area under the normal distribution curve is desired. The area is shown below.

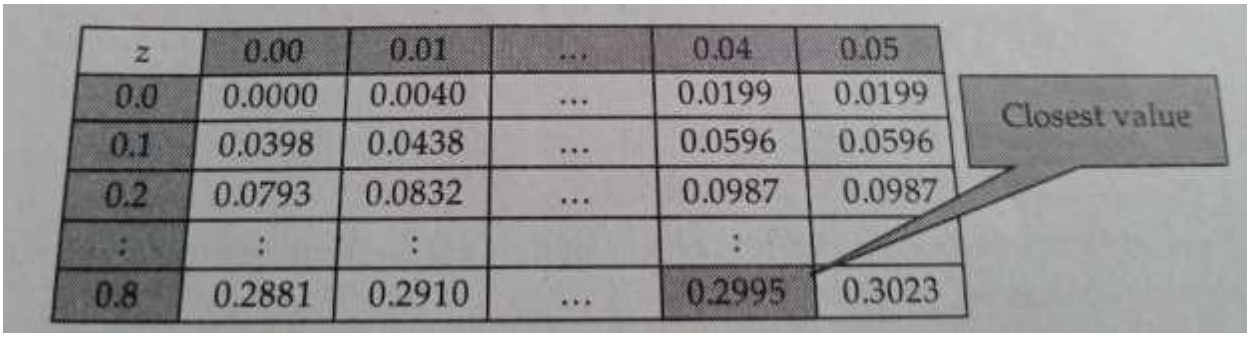


Work backwards to solve this problem.

Step 1: Determine the area under the normal distribution between 180 and 0.

0.5000 – 0.2000 = 0.3000

Step 2:Find the z value that corresponds to the area of 0.3000 by looking up 0.3000 in the area portion in the z table. If the specific value cannot be found, use the closest value, in this case 0.2995. The corresponding z score is 0.84.



z	0.00	0.01	...	0.04	0.05
0.0	0.0000	0.0040	...	0.0199	0.0199
0.1	0.0398	0.0438	...	0.0596	0.0596
0.2	0.0793	0.0832	...	0.0987	0.0987
:	:	:		:	
0.8	0.2881	0.2910	...	0.2995	0.3023

Step 3:Substitute in the formula $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$ ***and solve for x***

$$0.84 = \frac{x - 180}{25}$$

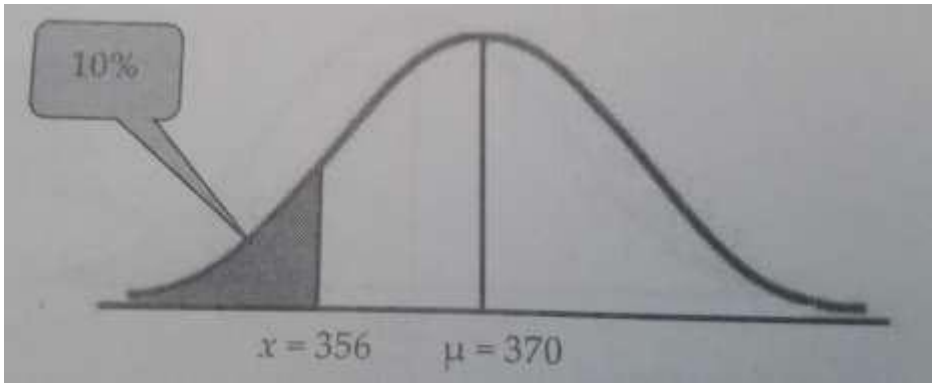
$$0.84(25) + 180 = x$$

$$201 = x$$

A score of 201 should be used as a cut off. Any applicant scoring 201 or higher qualifies for Master in Business Administration.

EXAMPLE 4: Suppose the Production Operation Manager at the canning plant for evaporated milk is faced with a problem. Because of the designed machines, it generated a standard deviation of 7 ml in the filling of evaporated milk, but the average ml per fill can be adjusted. Under fear of the revocation of license to operate and penalty charges by the Department of Trade and Industry, there is a maximum 10% chance od a 370 ml can content less than 356 ml. What should the average be?

Step 1: Draw a figure and represent the area under the normal curve



Step 2: Locate the area between 356 ml and μ = 370 ml in the standardized normal distribution table. That is 0.4000.

The z value that corresponds to a probability of 0.4000 is approximately -1.28.

Step 3: Solve for μ.

$$z = \frac{x-\mu}{\sigma}$$

$$-1.28 = \frac{356-\mu}{7}$$

$$-1.28(7) = 356 - \mu$$

$$-8.96 = 356 - \mu$$

$$\mu = 356 + 8.96 \qquad = 364.96$$

Thus, to have a probability of 10% or less of filling a can with less than356 ml, the average fill should be 364.96 ml

الفصل السادس

المتغيرات العشوائية

4.1 Introduction

A random variable is a function defined on a sample space. The values of the function can be anything at all, but for us they will always be numbers, the random variable is usually denoted by r.v..

Suppose that to each point of a sample space we assign a number. We then have a function defined on the sample space. This function is called a random variable or more precisely a random function. It is usually denoted by a capital letter such as X or Y.

For example if a coin is tossed twice, let X represent the number of heads that can come up, then the sample space is $S = \{HH, HT, TH, TT\}$, for each sample point we can associate a number for X as:

Sample point	TT	HT	TH	HH
$X = x$	$X = 0$	$X = 1$	$X = 1$	$X = 2$
$P(X = x)$	$P(X = 0) = 1/4$	$P(X = 1) = 2/4$		$P(X = 2) = 1/4$

It should be noted that many other random variables could also be defined on this sample space, for example, the square of the number of heads or the number of heads minus the number of tails.

Note that a random variable that takes on a countable number values (integers) is called a discrete random variable, while one which takes uncountable number values is called a continuous random variable.

4.2 Discrete random variable:

A random variable that takes a countable number values, suppose the random variable X be a discrete random variable, then $P(x) = P(X = x)$ is called the probability mass function $(p.m.f)$ of the random variable X. The probability mass function of the discrete random variable X have the following properties:

1. $P(x) = P(X = x) \geq 0$

2. $\sum_{\text{all x}} P(x) = \sum_{\text{all x}} P(X = x) = 1$

Note that the probability mass function of X is called the distribution of X

Ex49: Find the probability distribution of tossing a coin thrice, let X denote the number of Tails.

Sol: Since X is a number which values are defined on the outcomes of a random experiment. Therefore, X is a random variable. Now, sample space of the experiment is

$S = \{HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT\}$

S.P.	HHH	THH	HTH	HHT	TTH	THT	HTT	TTT
$X = x$	$X = 0$	$X = 1$			$X = 2$			$X = 3$
$P(x)$	$1/8$	$3/8$			$3/8$			$1/8$

$$\sum_{\text{all x}} P(x) = \sum_{i=0}^{3} P(x_i) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3)$$

$$\sum_{\text{all x}} P(x) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = 1$$

Ex50: let Y be a random variable with the following probability mass function

$Y = y$	-1	0	2	3	6
P(Y)	0.2	0.1	0.4	0.1	0.2

Find

1. $P(Y \geq -1)$
2. $P(Y < -1)$
3. $P(Y = 6)$

Sol:

1. $P(Y \geq -1) = \sum_{\text{all } y} P(y) = P(y = -1) + P(y = 0) + P(y = 2) + P(y = 3) + P(y = 6)$

$P(Y \geq -1) = 0.2 + 0.1 + 0.4 + 0.1 + 0.2 = 1$

2. $P(Y < -1) = 0$

3. $P(Y = 6) = 0.2$

Ex51: let X be a random variable with following probability mass function

Find

$X = x$	1	2	3	4	5
P(x)	2c	c	3c	5c	4c

1. The value of c.
2. $P(X \geq 2)$
3. $P(X < 3)$
4. $P(2 < X < 5)$
5. $P(3 \leq X < 4)$

Sol:

1. $\sum_{\text{all } x} P(x) = 1$

$\sum_{x=1}^{5} P(x) = P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) + P(X=4) + P(X=5) = 1$

$2c + c + 3c + 5c + 4c = 1 \Rightarrow 15c = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{15}$

X = x	1	2	3	4	5
P(x)	2/15	1/15	3/15	5/15	4/15

2. $P(X \geq 2) = P(X=2) + P(X=3) + P(X=4) + P(X=5)$

$P(X \geq 2) = \frac{1}{15} + \frac{3}{15} + \frac{5}{15} + \frac{4}{15} = \frac{13}{15}$

or $P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - P(X=1) = 1 - \frac{2}{15} = \frac{13}{15}$

3. $P(X < 3) = P(X=2) + P(X=1) = \frac{1}{15} + \frac{2}{15} = \frac{3}{15}$

or $P(X < 3) = 1 - P(X \geq 3) = 1 - P(X=1)$

$1 - [P(X=3) + P(X=4) + P(X=5)] = 1 - \frac{12}{15} = \frac{3}{15}$

4. $P(2 < X < 5) = P(X=3) + P(X=4) = \frac{3}{15} + \frac{5}{15} = \frac{8}{15}$

5. $P(3 \leq X < 4) = P(X=3) = \frac{3}{15}$

4.3 Mathematical expectation of the discrete random variable:

The mathematical expectation for the discrete random variable X is the mean of the probability mass function (distribution), it is denoted by E(X) and can be obtained as:

$$E(X) \text{ or } \mu = \sum_{\text{iall x}} x\,P(x)$$

The mathematical expectation for the discrete random variable X has some characteristics (properties):

1. $E(X^r) = \sum_{\text{all x}} x^r\,P(x)$
2. $E(k) = k$, where k is constant
3. $E(kX) = k\,E(X)$, where k is constant

Ex52: Let X be a random variable with the following p. m. f:

X = x	1	2	4
P(x)	2/10	3/10	5/10

Find:

$E(X)$, $E(X^2)$, $E(\sqrt{X})$, $E(5X)$, $E(2X-2)$

Sol:

$$E(X) = \sum_{\text{all x}} x\,P(x) = (1)\,(\frac{2}{10}) + (2)\,(\frac{3}{10}) + (4)\,(\frac{5}{10}) = \frac{28}{10}$$

$$E(X^2) = \sum_{\text{all x}} x^2\,P(x) = (1)^2\,(\frac{2}{10}) + (2)^2\,(\frac{3}{10}) + (4)^2\,(\frac{5}{10}) = \frac{94}{10}$$

$$E(\sqrt{X}) = \sum_{\text{all x}} \sqrt{x}\, P(x) = \sqrt{1}\,(\frac{2}{10}) + \sqrt{2}\,(\frac{3}{10}) + \sqrt{3}\,(\frac{5}{10})$$

$$E(5X) = 5\,E(X) = 5\,\frac{28}{10} = 14$$

$$E(2X-2) = 2\,E(X) - 2 = (2)\,\frac{28}{10} - 2 = \frac{76}{10}$$

4.4 Variance of the discrete random variable:

Let X be a discrete random variable, the variance of X is given as:

$Var(X)$ or $\sigma_X^2 = E(X^2) - [E(X)]^2$

Where:

$$E(X) = \sum_{\text{all x}} x\,P(x) \text{ and } E(X^2) = \sum_{\text{all x}} x^2\,P(x)$$

Also the standard deviation of X is given as:

$$\sigma_X = \sqrt{\sigma_X^2} = \sqrt{E(X^2) - [E(X)]^2}$$

The variance of the discrete random variable X has some characteristics:

1. $Var(k) = 0$, where k is constant
2. $E(kX) = k^2\,E(X)$, where k is constant

Ex53: Let X be a random variable with the following p. m. f:

$X = x$	1	2	4
P(x)	2/10	3/10	5/10

Find:

$E(5X), Var(X), Var(2X), Var(2X-1)$

Sol:

$$E(X) = \sum_{\text{all } x} x\,P(x) = (1)\left(\frac{2}{10}\right) + (2)\left(\frac{3}{10}\right) + (4)\left(\frac{5}{10}\right) = \frac{28}{10}$$

$$E(5X) = 5 * E(X) = 5 * \frac{28}{10} = 14$$

$$E(5X) = 5\,E(X) = 5\,\frac{28}{10} = 14$$

$$E(X^2) = \sum_{\text{all } x} x^2\,P(x) = (1)^2\left(\frac{2}{10}\right) + (2)^2\left(\frac{3}{10}\right) + (4)^2\left(\frac{5}{10}\right) = \frac{94}{10}$$

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{94}{10} - \left(\frac{28}{10}\right)^2 = \frac{940 - 784}{100} = \frac{156}{100}$$

$$Var(2X) = 4 * Var(X) = 4 * \frac{156}{100} = \frac{624}{100}$$

$$Var(2X - 1) = 4 * Var(X) = \frac{624}{100}$$